RATIO VERA
DIAMETRI AD PERIPHERIAM,
UT 8:25, VARIIS MODIS

A

VICE - COLONELLO EUGENIO CORSONICH

INVICTE DEMONSTRATA,

ET

JUDICIO ORBIS ERUDITI

SUBJECTA.

VARSAVIÆ, ANNO MDCCLXXXI.

Scholion §. 25ti prolongatum. *Ad continuandas rationes hujus Scholii, assumantur pro Antecedentibus duo numeri unitate differentes e. gr.* 45 *&* 46, *& ad 3plum prioris addatur factor, qui ductus in* 8 *producat numerum paulò majorem Antecedente priore* 45, *nempe* 6: *nam* 6 x 8 = 48; *quo factore addito ad illius 3plum, oritur ratio excessiva* 45 : 141; *deinde ad 3plum Antecedentis posterioris addatur factor, qui ductus in* 8 *producat numerum aliquantò minorem Antecedente posteriore* 46, *nempe* 5 : *nam* 5 x 8 = 40; *quo factore addito ad ejus 3plum, prodit ratio defectiva* 46: 143. *Pari modo reperiuntur rationes* 47 : 147 *&* 48 : 149; 49 : 154 *&* 50 : 156; 51 : 160 *&* 52 : 162; 53 : 166 *&* 54: 168; 55 : 172 *&* 56: 174; 57 : 179 *&* 58 : 181; 59 : 185 *&* 60 : 187 *& innumeræ aliæ, quarum excessivæ sunt semper paulò majores, & defectivæ paulò minores, quàm* 1 : $3\frac{1}{8}$: *id quod ita demonstratur: Sit Antecedens rationis excessivæ* = a, *& factor ad ejus 3plum* 3 a *addendus* = n, *erit fractio excedens triplum Antecedentis* = $\frac{n}{a}$, *qua reducta cum* $\frac{1}{8}$ *ad eandem denominationem, prodeunt æquivalentes* $\frac{8n}{8a}$ *&* $\frac{a}{8a}$. *Jam cum per hypothesim* 1*mam* 8n *sit majus quàm* a; *palam est, etiam fractionem priorem esse majorem posteriore* = $\frac{1}{8}$. *Sit porro Antecedens rationis defectivæ* = d (§. 15.) *& factor ad ejus 3plum addendus* = u: *quoniam per hyposim* 2*dam* 8 u *est minus, quàm* d; *erit etiam fractio excedens 3plum Antecedentis minor, quàm* $\frac{1}{8}$. *Ergo. Per hujusmodi rationes autem tam calculi tœdium, quàm partium varietas semper evitatur, quia factis faciendis, nunquam plures differentiæ, quàm* 8 *emergunt, inter quas unica duntaxat datur, quam denominator minor peripheriarum falsarum exactè metitur, & quæ per divisionem statim innotescit. Quare etiam summa* x † y *in plures partes quàm* 2 *resolvi nequit, quarum altera necessariò excessus, altera defectus esse debet* (§. 22). *Possunt etiam pro Antecedentibus assumi numeri, aliquot unitatibus, decadibus, vel centenariis inter se differentes, e. gr.* 200 *&* 401, 300 *&* 507, *dummodo nota dextima alterutrius sit semper una ex his* 1, 3, 7, 9. *Quicunque igitur per par quodcunque rationum hac methodo inventarum operari dignabitur, cognoscet, si voluerit, indubitatè, rationem diametri ad periph.* = 8 : 25 *ex legitimo argumentandi & universali computandi modo, non autem ex combinatione numerorum arbitraria, esse deductam. Ad ferendum judicium æquum, oportet inprimis Problema* 4*tum sibi reddere familiare.*

PRÆFATIO.

AB omni ævo, quo Geometria fuit exculta, Quadratura Circuli *extitit nodus* Herculanus, *quem Mathematici celeberrimi ſolvere fruſtra ſunt conati. Tantum autem abeſt, ut tot exemplis operæ perditæ ab eodem objecto inveſtigando fuerim absterritus, ut potius (abſit jactantia dicto) eo vehementiori flagraverim deſiderio materiam tam ſcabroſam ſeriò tractandi, veritatemque aſſequendi. Hoc intuitu varia compoſui ſcripta, quæ à nonnullis prædicatione fuére celebrata, ab aliis obſcuritatis taxata, ab aliis tandem pro falſis habita, atque vituperata. Quamobrem conſultum duxi, juris facere publici hocce Opuſculum novum & poſtremum, in quo claritati, quàm maximè fieri potuit, ſtudui, omnesque propoſitiones argumentis demonſtrantibus adeò munivi, ut nullæ objectiones contra eas formari queant, quin illico corruant. Præmiſſis Definitionibus & Axiomate uno, poſui pro baſi demonſtrationum mearum Problema 1mum ſimpliciſſimum quidem, ſed veriſſimum, & nulli Paralogiſmo obnoxium: id quod ritè perpenſa conditione ejus (§. 12. 13.), jure negari haud poteſt. Problemati 1mo legitimo ratiocinando modo ſuperſtruxi 2dum non minus ſolidum, & huic 3tium eadem proprietate præditum. Ope horum trium Problematum condidi octo Theoremata, de quorum veritate eò minus dubitare licet, quò firmiora ſunt fundamenta, quibus innituntur: id quod inprimis ex Theorematibus 3tio & 4to fiet manifeſtum, per quæ* semper & sine ulla exceptione *peripheria diametri 8 prodit = 25, & lunula Circuli, cujus diameter 2, = 1. Arbitrabar quidem,* Rationes *Scholii* §. *25ti eſſe ſuffecturas ad determinandam hanc peripheriam: nihilominus tamen rogatus à quodam Anonymo, ut traderem Methodum eas continuandi & reſolutionem* summæ excessus & defectus *in plures quàm duas partes evitandi; eam ante hanc Præfationem demonſtrativè expoſui. Et quoniam reſolutio dictæ ſummæ in partes, ex quibus fuit orta, ſæpe conjuncta eſt cum difficultatibus permagnis, præſertim ſi numerator eſt conflatus ex utroque denominatore multiplo peripheriarum falſarum; ſtruxi, ad enucleandas eas, Problema 4tum, per quod exceſſus & defectus illico ſcientificè reperiuntur. Ex Problemate 5to & 6to innoteſcet modus componendi quadratum par cuivis Circulo dato, & deſcribendi Circulum æqualem cuilibet quadrato dato. Denique ex Problemate 7mo perſpicient etiam ii, qui magis experimentis, quàm rationibus convincuntur, diametrum ad peripheriam eſſe unicè ut 8:25. Jam ante biennium complevi annum Climactericum magnum; præterea Matheſin, quam in juventute mea proprio Marte ex Operibus immortalis* Wolfii *didici, cum ſucceſſu hìc docui: id quod ideo tantùm commemoro, ut inde judicari poſſit, me nihil ex levitate & ſine ſufficiente examine virium intellectus mei ſuſcepiſſe. Sed id magis patebit ex ipſo Opuſculo, quod judicio æquo Orbis eruditi ſubjicio, cujus benevolentiæ me demiſsè commendo: ex eo, in-*

quam

quam luculenter elucebit, diametrum ad peripheriam esse, ut 8 : 25 (§. 17. 18. 24. 32. 34. 36. 38.); *quadratum diametri ad Circulum ut* 64 : 50 (§. 31.), *consequenter ad semicirculum ut* 64 : 25; *ad lunulam ut* 4 : 1 (§. 28.); *ad segmentum autem ut* 64 : 9 (§. 33.); *& lunulam ad segmentum ut* 16 : 9 (§. 37.); *ex quo utique tutò concludi potest, tam semicirculos, quàm segmenta esse numeros æquè perfectè quadratos, ac sunt lunulæ. Jam cum tam in* Methodo demonstrativa perfectè quadrandi circulum, *quæ, ut ex Dissertatione adjecta patebit, non fuit ritè intellecta, quàm in omnibus aliis scriptis à me editis eædem contineantur veritates; palam est, nullum eorum potuisse refutari. Inter peripherias falsas* $3\frac{1}{7}$ *&* $3\frac{1}{9}$ *diametri* 1 *dantur quidem innumeræ fractiones intermediæ, quarum aliæ sunt majores, aliæ minores, quàm* $3\frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ *: attamen nulla alia, ut ex n.* 1 §. 18*vi perspicuum est, constituit peripheriam veram, nisi* $\frac{25}{8}$. *Longè plures fractiones reperiuntur inter peripherias falsas* §. 24 *&* 25*ti reductas ad eandem diametrum* = 1, *h. e. inter* $3\frac{1}{4}$ *&* 3; $3\frac{1}{6}$ *&* 3; $3\frac{2}{8}$ *&* $3\frac{1}{9}$; $3\frac{2}{9}$ *&* $3\frac{1}{10}$; $3\frac{2}{11}$ *&* $3\frac{1}{12}$ *&c. nihilominus tamen sola fractio* $\frac{25}{8}$ *exhibet peripheriam veram diametri* 1: *nam* 8:25 (§. 24.) = 1: $\frac{25}{8}$. *Quod superest, Te Lector Benevole etiam atque etiam rogo, ne credas, me esse hominem tam perfrictæ frontis, ut aliis solùm glaucoma objicere, & commenta pro veritatibus indubitatis obtrudere velim. Scio enim, non minus esse vitium, falsitates pertinaciter tueri, quàm evidentia impudenter negare. Quicunque argumenta, quæ hic in medium affero, pacato animo attentè, & rectè perpenderit, fateri debebit, nisi propriæ convictioni contravenire voluerit, me hujusmodi reprehensionem non mereri. Postremò, per partes summæ* $x + y$ *intelligendi sunt semper* excessus *&* defectus; *& 2da pars Corollarii* §. 19. *est ita legenda:* Ratione, *cujus Antecedens est* 100, *multiplicata per* 2, 4, 6, *aut alium numerum parem, evadit* novus Antecedens *quoque divisibilis per* 8. *Deinde* §. 18 *lin.* 11 *loco* $\frac{176}{8}$ *debet esse* $\frac{178}{7}$; *&* §. 23 *lin.* 2 *loco possit* possint. *Vale Lector Benevole, huncque exigui ingenii mei partum benignis intueri dignare oculis. Dabam Varsaviæ ipsis Calendis Maji A.* 1781.

1. DEFINITIO I. *Quadratura Circuli* est modus accuratè determinandi aream circuli in mensura quadrata, inveniendique quadratum æquale cuivis circulo dato.

2. COROLLARIUM. Quoniam circulus æquatur Triangulo, cujus basis peripheriæ circuli, altitudo verò æqualis radio; palam est, cardinem rei hic verti in determinanda ratione vera diametri ad peripheriam.

3. DEFINITIO II. *Quantitas excessiva* est ea, quæ constat ex vera & ex excessu supra veram.

4. COROLLARIUM. Ablato itaque excessu ex quantitate excessiva, relinquitur quantitas vera.

5. DEFINITIO III. *Quantitas defectiva* est ea, quæ deficit aliqua parte à vera. Pars deficiens vocatur *defectus*.

6. COROLLARIUM I. Addito itaque valore defectus ad quantitatem defectivam, prodit quoque quantitas vera.

7. COROLLARIUM II. Ablata quantitate vera ex excessiva, relinquitur excessus (§. 3.). Subducta autem quantitate defectiva ex excessiva, relinquitur præter excessum adhuc defectus. Nam sit quantitas excessiva $= a$, excessus ejus supra veram $= x$ & defectus à vera $= y$; erit quantitas vera $= a - x$ & defectiva $= a - x - y$, quæ ablata ex excessiva a relinquit differentiam $x + y$, h. e. summam excessus & defectus, quam idcirco brevitatis gratia vocó etiam *summam* $x + y$.

8. DEFINITIO IV. *Ratio excessiva* est comparatio 2 quantitatum (linearum, superficierum, corporum) quarum una est assumta paulò major ac revera esse potest.

9. DEFINITIO V. *Ratio defectiva* est comparatio 2 quantitatum, quarum una est assumta paulò minor, ac reverà esse potest.

10. AXIOMA. Si ex aliquot quantitatibus ejusdem speciei & diametri per rationes excessivas inventis auferantur partes, quæ creduntur esse excessus; vel ad defectivas addantur partes, quæ supponuntur esse defectus, & semper prodeat idem quantum; erunt reverà partes ablatæ excessus, partes additæ defectus, & quantum, hoc modo determinatum, justum.

11. SCHOLION. *Sint lunulæ circuli (cujus diameter 2) excessivæ* $\frac{8}{5}$ $\frac{12}{7}$ *&* $\frac{12}{9}$, *& partes auferendæ* $\frac{3}{5}$ $\frac{5}{7}$ *&* $\frac{3}{9}$; *erunt* $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$; $\frac{12}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1$; $\frac{12}{9} - \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1$. *Sint porro lunulæ defectivæ* $\frac{4}{6}$ $\frac{4}{8}$ *atque* $\frac{8}{10}$, *& partes addendæ* $\frac{2}{6}$ $\frac{4}{8}$ *&* $\frac{2}{10}$; *erunt* $\frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$; $\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1$; $\frac{8}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$. *Quoniam igitur lunula prodit sexies* $= 1$; *necesse est, ut vi Axiomatis præcedentis ea sit justa, & ut partes ablatæ sint reverà excessus, & partes additæ defectus.* Confer. §. 28.

PROBLEMA I.

12. *Determinare partes summæ, cujus numerator est aggregatum ex utroque factore denominatoris sui.*

Sit denominator summæ $= mo$ & numerator $= o+m$, h. e., sit ille aggregatum ex utroque factore $o+m$ denominatoris mo; erit summa ipsa $\frac{o+m}{mo} = \frac{o}{mo} + \frac{m}{mo} = \frac{1}{m} + \frac{1}{o}$; exquo fluit

Theorema: Si numerator summæ est aggregatum ex utroque factore denominatoris sui; necesse est, ut unus factor sit denominator unius partis, alter factor denominator alterius partis & unitas numerator utriusque partis.

13. SCHOLION. *Non ignoro quidem, quamlibet summam innumeris modis in 2 partes resolvi posse: attamen quoniam hic solum de tali agitur, cujus numerator sit conflatus ex utroque factore denominatoris sui; nequeunt eam aliæ partes juxta hanc conditionem efficere, nisi quæ per Theorema præcedens fuerint determinatæ. Sic* $\frac{3+4}{4\times 3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}$; $\frac{5+6}{6\times 5} = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}$; $\frac{7+8}{8\times 7} = \frac{1}{8} + \frac{1}{7}$; $\frac{9+10}{10\times 9} = \frac{1}{10} + \frac{1}{9}$; *& ita porro.*

PROBLEMA II.

14. *Determinare tam excessum, quàm defectum 2 peripheriarum, quarum altera per rationem excessivam, altera per defectivam fuit inventa.*

Sit diameter 1, ratio ejus ad peripheriam excessiva (§. 8.) $= a:b$ & defectiva (§. 9.) $= d:e$. Quoniam peripheriæ investigantur per Regulam proportionum; inferatur. Ut diameter a ad peripheriam excessivam b (§. 3.), ita diameter 1 ad periph. excessivam $\frac{b}{a}$; & ut diameter d ad periph. defectivam e, (§. 5.) ita diameter 1 ad defectivam $\frac{e}{d}$. Reductis deinde his peripheriis ad eandem denominationem, prodeunt æquivalentes $\frac{db}{ad}$ & $\frac{ae}{ad}$, quarum posterior ex priore ablata relinquit summam excessus & defectus $= \frac{db-ae}{ad}$ (§. 7.). Sit jam hujus numerator $db - ae =$ denominatoribus $d+a$ peripheriarum falsarum: quoniam æqualia possunt inter se permutari, & unum in alterius locum potest poni; palam est, quantitatem $\frac{d+a}{ad}$ esse quoque summam excessus & defectus, cujus numerator est itaque conflatus ex utroque factore $d+a$ denominatoris sui ad. Jam cum nullæ aliæ partes hanc summam ita producere queant, ut ejus numerator sit aggregatum ex utroque factore denominatoris sui, nisi $\frac{1}{a}$ & $\frac{1}{d}$ (§. 12. 13.); necesse est, ut altera harum partium sit excessus, altera defectus. Et quoniam peripheria excessiva $\frac{b}{a}$ constat ex vera atque ex excessu (§. 3.), & $\frac{1}{a}$ est ejus pars homogenea; dubitari nequit, quin $\frac{1}{a}$ sit excessus & per consequens $\frac{1}{d}$ defectus. Jam cum quævis ratio excessiva quantitatis cognitæ ad in-

cogni-

cognitam, si utraque in eadem proportione crescit & decrescit, per $a : b$, & quævis defectiva per $d : e$ designari possit; sequitur inde

Theorema: Si numerator summæ excessus & defectus 2 quantitatum est aggregatum ex denominatoribus simplis quantitatum defectivæ & excessivæ; necesse est, ut denominator excessus sit idem ac quantitatis excessivæ, denominator defectus idem ac quantitatis defectivæ, & numerator utriusque unitas.

15. COROLLARIUM I. Pro determinando itaque excessu & defectu 2 quantitatum ejusdem speciei & diametri, assumendæ sunt semper 2 rationes, quarum altera sit excessiva, altera defectiva, & quarum Antecedentes sint diversi.

16. COROLLARIUM II. Quoniam denominator tam quantitatis excessivæ, quàm excessûs est $= a$, & Antecedens rationis excessivæ quoque $= a$; denominator tam quàntitatis defectivæ, quàm defectus $= d$, & Antecedens rationis defectivæ pariter $= d$; in confesso est, cognito excessu & defectu 2 quantitatum, etiam Antecedentes rationum sciri posse, per quas uterque prodire debet.

THEOREMA I.

17. *Diameter est ad Peripheriam ut 8 : 25.*

DEMONSTRATIO. Ponendo ubique diametrum 1 pro 3tio termino proportionis & designando 1.) rationem diametri ad peripheriam excessivam $a : b$ per $8 : 26$; defectivam $d : e$ autem per $16 : 49$, prodeunt peripheriæ $\frac{26}{8}$ & $\frac{49}{16} = \frac{416}{128}$ & $\frac{392}{128}$, quæ ex se invicem ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{24}{128} = \frac{d+a}{ad} = \frac{16+8}{8 \times 16}$ (§. 7.), cujus numerator est itaque conflatus ex utroque factore $16 + 8$ denominatoris sui 128. Quare partes hujus summæ nequeunt esse aliæ nisi $\frac{1}{8}$ & $\frac{1}{16}$ (§. 12. 13.). Et quoniam factores $16 + 8$, ex quibus numerator summæ est conflatus, sunt unà denominatores peripheriarum defectivæ $\frac{49}{16}$ & excessivæ $\frac{26}{8}$; necesse est, ut $\frac{1}{8}$ sit excessus & $\frac{1}{16}$ defectus (§. 14.), consequenter peripheria vera $\frac{26}{8} - \frac{1}{8} = \frac{25}{8}$ (§. 4.); vel $\frac{49}{16} + \frac{1}{16} = \frac{50}{16} = \frac{25}{8}$ (§. 6.). 2.) Assumtis rationibus $24 : 76$ & $32 : 99$ oriuntur peripheriæ $\frac{76}{24}$ & $\frac{99}{32}$, $= \frac{2432}{768}$ & $\frac{2376}{768}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{56}{768}$, cujus numerator est aggregatum ex utroque denominatore $32 + 24$ peripheriarum falsarum: unde excessus est $\frac{1}{24}$ & defectus $\frac{1}{32}$, consequenter peripheria vera $\frac{76}{24} - \frac{1}{24} = \frac{75}{24} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{99}{32} + \frac{1}{32} = \frac{100}{32} = \frac{25}{8}$. 3.) Per rationes $40 : 126$ & $48 : 149$ emergunt peripheriæ $\frac{126}{40}$ & $\frac{149}{48} = \frac{6048}{1920}$ & $\frac{5960}{1920}$, quæ à se invicem subtractæ manifestant summam $x + y = \frac{88}{1920}$, cujus numerator est conflatus ex utroque denominatore 40 & 48 peripheriarum falsarum: hinc excessus est $\frac{1}{40}$ & defectus $\frac{1}{48}$, consequenter peripheria vera $\frac{126}{40} - \frac{1}{40} = \frac{125}{40} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{149}{48} + \frac{1}{48} = \frac{150}{48} = \frac{25}{8}$. 4.) Per rationes $56 : 176$ & $64 : 199$ prodeunt peripheriæ $\frac{176}{56}$ & $\frac{199}{64} = \frac{11264}{3584}$ & $\frac{11144}{3584}$, quibus ex se ablatis remanet summa $x + y = \frac{120}{3584}$, cujus numerator constat ex deno-

mina-

minatoribus 64 & 56 peripheriarum falsarum: ergo excessus est $\frac{1}{56}$ & defectus $\frac{1}{64}$, consequenter peripheria vera $\frac{176}{56} - \frac{1}{56} = \frac{175}{56} = \frac{25}{8}$; vel $\frac{199}{64} + \frac{1}{64} = \frac{200}{64} = \frac{25}{8}$. Cum igitur partes $\frac{1}{8}$, $\frac{1}{24}$, $\frac{1}{40}$, $\frac{1}{56}$ ex peripheriis excessivis ablatæ, & partes $\frac{1}{16}$, $\frac{1}{32}$, $\frac{1}{48}$, & $\frac{1}{64}$, ad defectivas additæ producant octies eandem peripheriam $\frac{25}{8}$; palam est, hanc esse justam, & reverà quamlibet partem ablatam esse excessum & quamlibet additam defectum (§. 10.). Est igitur diameter ad peripheriam ut $1 : \frac{25}{8}$, h. e. multiplicando utrinque per 8, ut $8 : 25$.

THEOREMA II.

18. *Ad determinandam peripheriam veram, cujus diameter est 1, necesse est, uti rationibus, quarum Antecedentes sint divisibiles per 8.*

DEMONSTRATIO. 1mo.) Per rationes $7 : 22$ & $9 : 28$ prodeunt peripheriæ diametri $1 = \frac{22}{7}$ & $\frac{28}{9} = \frac{198}{63}$ & $\frac{196}{63}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{2}{63}$ (§. 7.), quæ in partes resolvi nequit, quia ejus numerator non est aggregatum ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Nihilominus tamen assumta diametro 8, oriuntur per easdem rationes peripheriæ $\frac{176}{7}$ & $\frac{224}{9} = \frac{1584}{63}$ & $\frac{1568}{63}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{16}{63}$, cujus numerator est conflatus ex denominatoribus $9 + 7$ peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{7}$ & defectus $\frac{1}{9}$ (§. 14.), consequenter peripheria vera $\frac{176}{8} - \frac{1}{7} = \frac{175}{7} = 25$; vel $\frac{224}{9} + \frac{1}{9} = \frac{225}{9} = 25$, ad quam diameter se habet ut $8 : 25$. Jam cum tam peripheriæ, quàm earum excessus & defectus crescant & decrescant in ratione diametrorum, & diameter 1 sit octies minor diametro 8; necesse est, ut etiam excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit octies minor, quàm $\frac{1}{7}$ & $\frac{1}{9}$, nempe prior $\frac{1}{56}$ & posterior $\frac{1}{72}$. 2.) Per rationes $6 : 19$ & $10 : 31$ emergunt diametri 1 peripheriæ $\frac{19}{6}$ & $\frac{31}{10} = \frac{190}{60}$ & $\frac{186}{60}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{4}{60}$, quæ est in partes irresolubilis, quia ejus numerator non constat ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Attamen assumta diametro 4, prodeunt per easdem rationes peripheriæ $\frac{76}{6}$ & $\frac{124}{10} = \frac{760}{60}$ & $\frac{744}{60}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{16}{60}$, cujus numerator est aggregatum ex denominatoribus $10 + 6$ peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{6}$ & defectus $\frac{1}{10}$, consequenter peripheria vera $\frac{76}{6} - \frac{1}{6} = \frac{75}{6}$; vel $\frac{124}{10} + \frac{1}{10} = \frac{125}{10}$, ad quam diameter se habet ut $4 : \frac{75}{6} = 24 : 75 = 8 : 25$; vel ut $4 : \frac{125}{10} = 40 : 125 = 8 : 25$. Cum autem diameter 1 sit quater minor diametro 4; necesse est, ut etiam excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit quater minor quàm $\frac{1}{6}$ & $\frac{1}{10}$, nempe prior $\frac{1}{24}$ & posterior $\frac{1}{40}$. 3.) Per rationes $20 : 63$ & $4 : 12$ oriuntur diametri 1 peripheriæ $\frac{63}{20}$ & $\frac{12}{4} = \frac{252}{80}$ & $\frac{240}{80}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{12}{80}$, quæ denuo in partes resolvi nequit, siquidem ejus numerator non est conflatus ex denominatoribus peripheriarum falsarum. Attamen assumta diametro 2, emergunt per easdem rationes peripheriæ $\frac{126}{20}$ & $\frac{24}{4} = \frac{504}{80}$ & $\frac{480}{80}$, quæ à se invicem subtractæ

relin-

relinquunt summam $x + y = \frac{24}{80}$, cujus numerator est aggregatum ex denominatoribus $4 + 20$ peripheriarum falsarum. Ergo excessus est $\frac{1}{20}$ & defectus $\frac{1}{4}$ consequenter peripheria vera $\frac{126}{20} - \frac{1}{20} = \frac{125}{20}$; vel $\frac{24}{4} + \frac{1}{4} = \frac{25}{4}$, ad quam diameter se habet ut $2 : \frac{125}{20} = 40 : 125 = 8 : 25$; vel ut $2 : \frac{25}{4} = 8 : 25$. Cum autem diameter 1 sit bis minor diametro 2; necesse est etiam, ut excessus & defectus peripheriarum diametri 1 sit bis minor: nempe excessus $\frac{1}{40}$ & defectus $\frac{1}{8}$. Jam cum denominatores partium $\frac{1}{56}$ & $\frac{1}{72}$; $\frac{1}{24}$ & $\frac{1}{40}$; $\frac{1}{40}$ & $\frac{1}{8}$ sint facta ex Antecedentibus rationum $7 : 22$ & $9 : 28$; $6 : 19$ & $10 : 31$; $20 : 63$ & $4 : 12$ in diametros 8, 4 & 2; & eadem facta sint quoque Antecedentes rationum his partibus determinandis inservientium (§. 16.); necesse est, etiam consequentes dictarum rationum in easdem diametros ducere, ut emergant rationes æquales $56 : 176$ & $72 : 224$; $24 : 76$ & $40 : 124$; $40 : 126$ & $8 : 24$. Jam cum Antecedentes harum rationum sint $= 7 \times 8$ & 9×8; 3×8 & 5×8; 5×8 & 1×8; & Antecedentes omnium aliarum rationum, investigandis peripheriis diametri 1 inservientium, sint resolubiles in 2 factores, quorum unus semper est 8; manifestum est, ad determinandam periph. veram, cujus diameter est 1, utendum esse rationibus, quarum Antecedentes sint divisibiles per 8.

19. COROLLARIUM. Rationes igitur, quarum Antecedentes non sunt divisibiles per 8, ducendæ sunt in hunc numerum. Ratio, cujus Antecedens est 100, multiplicata per 2, 4, 6, aut alium numerum parem, evadit quoque divisibilis per 8.

PROBLEMA III.

20. *Determinare excessum & defectum 2 quantitatum e. gr. peripheriarum ejusdem diametri, quando numerator summæ* $x + y$ *est aggregatum; vel ex denominatore multiplo unius & simplo alterius peripheriæ falsæ; vel ex utroque denominatore multiplo.*

Sit numerus, qui indicat, denominatorem peripheriæ falsæ plures quàm semel in numeratore summæ contineri, $= m$; & quoniam summa $x + y$ est $= \frac{db - ae}{ad}$ (§. 14.): sit hujus numerator $db - ae = md + a$; vel $d + ma$; vel $md + ma$, h. e. sit ille aggregatum ex multiplo denominatore peripheriæ defectivæ, & simplo excessivæ; vel ex simplo defectivæ & multiplo excessivæ; vel ex utroque multiplo denominatore peripheriarum falsarum. Quoniam æqualia æqualibus substitui possunt: erunt in 1mo casu summa excessus & defectus $\frac{md + a}{ad}$ & partes ejus $\frac{md}{ad} + \frac{a}{ad} = \frac{m}{a} + \frac{1}{d}$; in secundo $\frac{d + ma}{ad}$ & partes $\frac{d}{ad}$ $\frac{ma}{ad} = \frac{1}{a} + \frac{m}{d}$; in 3tio $\frac{md + ma}{ad}$ & partes $\frac{md}{ad} + \frac{ma}{ad} = \frac{m}{a} + \frac{m}{d}$. Jam cum etiam aliæ quantitates per rationes excessivas & defectivas inventæ, in quibus hæ conditiones locum habent, per easdem literas possint denotari; sequitur inde

Regula: 1.) Si numerator summæ $x + y$ est aggregatum ex multiplo denominatore quantitatis defectivæ & simplo excessivæ, subscribatur numero, qui indicat, quoties denominator defectivæ contineatur in numeratore summæ, denominator excessivæ, & unitati denominator defectivæ. 2.) Si numerator summæ est aggregatum ex denominatore simplo quantitatis defectivæ & multiplo excessivæ, subscribatur numero, qui indicat, quoties denominator excessivæ contineatur in numeratore summæ, denominator defectivæ & unitati denominator excessivæ. 3.) Si numerator summæ est aggregatum ex utroque denominatore multiplo quantitatum falsarum, subscribatur numero, indicanti multiplum unius denominatoris, denominator alter. Hoc pacto prodeunt semper 2 partes, quarum una, habens cum quantitate excessiva eundem denominatorem, est excessus & altera defectus.

21. SCHOLION. *Usus hujus triplicis Regulæ patebit ex sequentibus:* 1.) *Per rationes* 100 : 325 = 200 : 650 & 1 : 3 = 8 : 24 (§. 19.) *prodeunt peripheriæ* $\frac{650}{200}$ *&* $\frac{24}{8} = \frac{5200}{1600}$ *&* $\frac{4800}{1600}$, *quæ ex se ablatæ relinquunt summam* $x + y = \frac{400}{1600}$, *cujus numerator est conflatus ex denominatore simplo* 200 *peripheriæ exc. & adhuc ex* 200, *in quo numero denominator* 8 *peripheriæ defectivæ continetur* 25 *vicibus. Scribendo itaque sub* 25 *denominatorem* 200 *peripheriæ exc. & sub* 1 *denominatorem* 8 *peripheriæ defectivæ, prodit excessus* $\frac{25}{200}$ *& defectus* $\frac{1}{8}$ (§. 20. *n.* 1.). 2. *Per rationes* 8 : 26 *&* 100 : 301 = 200 : 602 *emergunt diametri* 1 *peripheriæ* $\frac{26}{8}$ *&* $\frac{602}{200} = \frac{5200}{1600}$ *&* $\frac{4816}{1600}$, *quæ ex se subductæ relinquunt summam* $x + y = \frac{384}{1600}$, *cujus numerator est aggregatum ex denominatore simplo* 200 *peripheriæ defectivæ & adhuc ex numero* 184, *in quo denominator* 8 *periph. excessivæ continetur* 23 *vicibus. Ponendo ergo sub* 23 *denominatorem periph. defectivæ & sub* 1 *denominatorem excessivæ, prodit defectus* $\frac{23}{200}$ *& excessus* $\frac{1}{8}$ (*n.* 2.). 3.) *Per rationem* Archimedis 71 : 223 = 568 : 1784 *& defectivam* 7 : 21 = 56 : 168 (§. 19.) *oriuntur periph.* $\frac{1784}{568}$ *&* $\frac{168}{56} = \frac{99904}{31808}$ *&* $\frac{95424}{31808}$, *quæ à se subtractæ manifestant summam* $x + y = \frac{4480}{31808}$, *cujus numerator constat ex* 3976, *h. e. ex septuplo denominatore* 568 *peripheriæ* Archimedeæ *& ex* 504, *h. e. ex noncuplo denominatore* 56 *periph. defectivæ. Scribendo igitur sub* 7 *denominatorem* 56 *peripheriæ defectivæ & sub* 9 *denominatorem* 568 *periph. Archimedeæ, prodit excessus* $\frac{9}{568}$ *& defectus* $\frac{7}{56}$ (n. 3.). *Sed ne hujusmodi resolutio in partes facessat negotium, sit*

PROBLEMA IV.

22. *Reperire, quoties denominator tam major, quàm minor* 2 *quantitatum falsarum contineatur in numeratore summæ* $x + y$, *ut inde excessus & defectus facilè determinari queat.*

RESOLUTIO. 1mo: ex numeratore summæ auferatur denominator major quantitatum falsarum, ut habeatur 1ma differentia; ex hac 1ma differentia subducatur idem denominator, ut prodeat differentia 2da; ex hac auferatur quoque denominatór major, ut obtineatur 3tia diffe-

differentia; & hæc subtractio tamdiu continuetur, donec denominator major amplius subtrahi nequeat. 2do: Fiat periculum, quota differentia per denominatorem minorem exactè dividi possit, & scribatur sub Quoto ex hac divisione orto denominator major, & sub numero, qui indicat, quota differentia sit per denominatorem minorem divisibilis, denominator minor. Hoc pacto prodeunt semper 2 partes, quarum illa, quæ cum quantitate excessiva gaudet eodem denominatore, est excessus, & altera defectus.

4480
568
3912
3344
2776
2208
1640
1072
504

E. gr. Ex 3tio exemplo §. præcedentis liquet, summam x † y esse $\frac{4480}{31808}$; peripheriam excessivam $\frac{1784}{568}$ & defectivam $\frac{168}{56}$. Ablato itaque denominatore majore 568 ex numeratore summæ methodo prædicta, prodeunt, ut hic videre est, 7 differentiæ, quarum sola 7ma 504 per denominatorem minorem 56 exactè dividi potest. Scribatur itaque sub Quoto 9 ex hac divisione orto denominator major 568, & sub 7, quia solùm 7ma differentia est ita divisibilis, denominator minor 56, ita prodit excessus $\frac{9}{568}$ & defectus $\frac{7}{56}$.

DEMONSTRATIO. Quoniam differentia 1ma 3912 est = 4480 — 568; 2da 3344 = 4480 — 568 x 2 = 1136; 3tia 2776 = 4480 — 568 x 3 = 1704; 4ta 2208 = 4480 — 568 x 4 = 2272; 5ta 1640 = 4480 — 568 x 5 = 2840; 6ta 1072 = 4480 — 568 x 6 = 3408; 7ma 504 = 4480 — 568 x 7 = 3976; evidens est, differentiam 1mam cum simplo; 2dam cum duplo; 3tiam cum triplo; 4tam cum quadruplo; 5tam cum quintuplo; 6tam cum sextuplo & 7mam differentiam cum septuplo denominatore majore 568 efficere semper numeratorem summæ. Quoniam igitur sola 7ma differentia 504 continet denominatorem minorem 56 novies & cum septuplo denominatore majore 568 = 3976 præcisè constituit numeratorem summæ: liquet, hunc numeratorem esse conflatum ex noncuplo denominatore minore 56 & septuplo majore 568, h. e. ex noncuplo denominatore peripheriæ defectivæ & ex septuplo excessivæ: unde excessus debet esse $\frac{9}{568}$ & defectus $\frac{7}{56}$ (§. 20. n. 3.). Jam cum numerator cujuslibet summæ *x* † *y* possit hac methodo resolvi in duos numeros, quorum alter denominatorem minorem, alter majorem semel vel pluries contineat; perspicuum est, scribendo sub Quoto ex divisione differentiæ per denominatorem minorem orto denominatorem majorem, & sub numero, qui indicat, num hæc differentia, ita divisibilis, sit 1ma, 2da &c. denominatorem minorem, prodire semper excessum & defectum.

23. SCHOLION. *Si plures differentiæ, quàm una, per denominatorem minorem quantitatum falsarum exactè dividi possit; id indicio est, summam* x † y *in varias partes posse resolvi, consequenter vel rationem excessivam; vel defectivam; vel utramque simul à vera nimis recedere: adeoque assumendæ sunt rationes aliæ paulò magis ad veram accedentes.*

THEO-

THEOREMA III.

24. *Omnes numeri à 4 usque ad 100, 200 &c. possunt esse Antecedentes rationum pro determinanda peripheria vera diametri 8 assumendarum, quæ nequit esse alia nisi* $= 25$.

DEMONSTRATIO. Posita ubique diametro 8 pro 3tio termino proportionis & assumtis rationibus 1mo:) ut 4 : 13 & ut 5 : 15, prodeunt peripheriæ $\frac{104}{4}$ & $\frac{120}{5} = \frac{520}{20}$ & $\frac{480}{20}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{40}{20}$. Auferendo itaque 1mo ex ejus numeratore, & deinde ex quavis differentia inventa denominatorem majorem peripheriarum falsarum $= 5$, patebit, solam 4tam differentiam 20 per denominatorem minorem 4 exactè dividi posse. Ponendo itaque sub Quoto $= 5$ ex hac divisione orto denominatorem majorem 5 & sub numero 4 indicante, differentiam 4tam ita esse divisibilem, denominatoram minorem 4, prodeunt partes $\frac{5}{5}$ & $\frac{4}{4}$, quarum posterior utpote ejusdem denominationis cum peripheria excessiva $\frac{104}{4}$ est excessus & prior defectus (§. 22.): unde peripheria vera est $\frac{104}{4} - \frac{4}{4} = \frac{100}{4} = 25$; vel $\frac{120}{5} + \frac{5}{5} = \frac{125}{5} = 25$. 2.) Per rationes 6 : 19 & 7 : 21 oriuntur peripheriæ $\frac{152}{6}$ & $\frac{168}{7} = \frac{1064}{42}$ & $\frac{1008}{42}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{56}{42}$ cujus partes suut $\frac{7}{7}$ & $\frac{2}{6}$, quia sola 2da differentia 42 divisa per denominatorem minorem 6 exhibet Quotum 7. Ergo peripheria vera est $\frac{152}{6} - \frac{2}{6} = \frac{150}{6} = 25$, vel $\frac{168}{7} + \frac{7}{7} = \frac{175}{7} = 25$. 3.) Per rationes 8 : 26 & 9 : 28 emergunt peripheriæ $\frac{208}{8}$ & $\frac{224}{9} = \frac{1872}{72}$ & $\frac{1792}{72}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{80}{72}$ cujus partes sunt $\frac{8}{8}$ & $\frac{1}{9}$, quia sola octava differentia 8 divisibilis est per denominatorem minorem 8. Ergo peripheria vera est $\frac{208}{8} - \frac{8}{8} = \frac{200}{8} = 25$; vel $\frac{224}{9} + \frac{1}{9} = \frac{225}{9} = 25$. 4.) Per rationes 100 : 314 & 11 : 34 prodeunt peripheriæ $\frac{2512}{100}$ & $\frac{272}{11} = \frac{27632}{1100}$ & $\frac{27200}{1100}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{432}{1100}$, cujus partes sunt $\frac{3}{11}$ & $\frac{12}{100}$, quia sola differentia 3tia 132 est divisibilis per denominatorem minorem 11. Ergo periph. vera est $\frac{2512}{100} - \frac{12}{100} = \frac{2500}{100} = 25$; vel $\frac{272}{11} + \frac{3}{11} = \frac{275}{11} = 25$. 5.) Per rationem Metii 113 : 355 & defectivam 19 : 59 oriuntur peripheriæ $\frac{2840}{113}$ & $\frac{472}{19} = \frac{53960}{2147}$ & $\frac{53336}{2147}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{624}{2147}$, cujus partes sunt $\frac{3}{19}$ & $\frac{15}{113}$ quia sola 3tia differentia 285 divisa per denominatorem minorem 19 prodit quotum 15. Ergo peripheria vera est $\frac{2840}{113} - \frac{15}{113} = \frac{2825}{113} = 25$; vel $\frac{472}{19} + \frac{3}{19} = \frac{475}{19} = 25$. 6.) Per rationem D. *Durvie* Parochi in Normannia $= 567 : 1792$ & defectivam 10 : 31 emergunt peripheriæ $\frac{14336}{567}$ & $\frac{248}{10} = \frac{143360}{5670}$ & $\frac{140616}{5670}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{2744}{5670}$, cujus partes sunt $\frac{2}{10}$ & $\frac{161}{567}$, quia sola differentia 2da 1610 divisa per denominatorem minorem 10 manifestat Quotum 161. Ergo peripheria vera est $\frac{14336}{567} - \frac{161}{567} = \frac{14175}{567} = 25$; vel $\frac{248}{10} + \frac{2}{10} = \frac{250}{10} = 25$. Cum igitur partes, hic 6 & in Scholio sequente 18, ex peripheriis excessivis ablatæ, & partes, hic 6 & in Scholio sequente 18, ad peripherias defectivas

additæ

additæ producant quadragies octies eandem peripheriam 25; palam est, hanc esse veram, partes ablatas excessus & additas defectus (§. 10.). Jam cum per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulo majores, aliæ paulo minores, quàm $1 : 3\frac{1}{8}$, *semper & sine ulla exceptione* peripheria diametri 8 prodeat $= 25$; manifestum est, omnes numeros à 4 usque ad 100, 200 &c. esse posse Antecedentes rationum pro determinanda peripheria vera assumendarum, quæ nequit esse alia nisi $= 25$.

SCHOLION.

*25. *Ut veritas Theorematis præcedentis magis in apricum proferatur; consultum judico ex infinitis paribus rationum, per quæ peripheria diametri 8 prodit semper $= 25$, adducere adhuc 18 paria sequentia:* 9 : 29 & 10 : 31; 11 : 35 & 12 : 37; 13 : 41 & 14 : 43; 15 : 47 & 16 : 49; 17 : 54 & 18 : 56; 19 : 60 & 20 : 62; 21 : 66 & 22 : 68; 23 : 72 & 24 : 74; 25 : 79 & 26 : 80; 27 : 85 & 28 : 87; 29 : 91 & 30 : 93; 31 : 97 & 32 : 99; 33 : 104 & 34 : 106; 35 : 110 & 36 : 112; 37 : 116 & 38 : 118; 39 : 122 & 40 : 124; 41 : 129 & 42 : 131; 43 : 135 & 44 : 137.

26. COROLLARIUM I. Est itaque diameter ad peripheriam, ut 8 : 25, consequenter quadratum diametri ad circulum ut $64 : 50 = 32 : 25$, & cubus diametri ad sphæram, ut $512 : \frac{1600}{6}$, h. e. multiplicando utrinque per 6, & dividendo deinde per 64, ut 48 : 25.

27. COROLLARIUM II. Quoniam posito numero 8, qui est Antecedens rationis veræ 8 : 25, pro 3tio termino proportionis, prodit semper peripheria $= 25$; palam est, si posito Antecedente rationis e. gr. quadrati diametri ad lunulam $= 4 : 1$; vel ad circulum $= 32 : 25$, vel ad segmentum $= 64 : 9$; vel cubi diametri ad sphæram $= 48 : 25$ pro 3tio termino proportionis, emergat, factis faciendis, semper idem consequens, rationem ipsam esse veram.

THEOREMA IV.

28. *Ratio Quadrati diametri ad lunulam* $= 4 : 1$ *est vera.*

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente rationis $= 4 : 1$ pro 3tio termino proportionis, & assumtis rationibus 1mo:) ut 5 : 2 & 6 : 1 (§. 15.), prodeunt lunulæ $\frac{8}{5}$ & $\frac{4}{6} = \frac{48}{30}$ & $\frac{20}{30}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{28}{30}$ (§. 7.), cujus partes sunt $\frac{3}{5}$ & $\frac{2}{6}$, quia sola 3tia differentia 10 per denominatorem minorem 5 divisa exhibet Quotum 2 (§. 22.). Ergo lunula vera est $\frac{8}{5} - \frac{3}{5} = \frac{5}{5} = 1$; vel $\frac{4}{6} + \frac{2}{6} = \frac{6}{6} = 1$. 2.) Per rationes 7 : 3 & 8 : 1 emergunt lunulæ $\frac{12}{7}$ & $\frac{4}{8} = \frac{96}{56}$ & $\frac{28}{56}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{68}{56}$, cujus partes sunt $\frac{5}{7}$ & $\frac{4}{8}$, quia sola 5ta differentia 28 divisa per denominatorem minorem 7 exhibet Quotum 4: unde lunula vera est $\frac{12}{7} - \frac{5}{7} = \frac{7}{7} = 1$; vel $\frac{4}{8} + \frac{4}{8} = \frac{8}{8} = 1$. 3.) Per rationes 9 : 3 & 10 : 2 oriuntur lunulæ $\frac{12}{9}$ & $\frac{8}{10} = \frac{120}{90}$ & $\frac{72}{90}$, quibus à se invicem subtractis remanet summa $x + y = \frac{48}{90}$, cujus partes sunt $\frac{3}{9}$ & $\frac{2}{10}$, quia sola 3tia differentia 18 divisa per de

nomi-

nominatorem minorem 9 prodit Quotum 2. Ergo lunula vera est $\frac{12}{9} - \frac{3}{9} = \frac{9}{9} = 1$; vel $\frac{8}{10} + \frac{2}{10} = \frac{10}{10} = 1$. Cum igitur partes hic 3 & in Scholio sequenti 9 ex lunulis excessivis ablatæ, & partes, hic 3 & in Scholio sequente 9, ad defectivas additæ producant vicies quater eandem lunulam $= 1$; perspicuum est, hanc esse justam (§. 10.), consequenter rationem quadrati diametri ad eam ut 4: 1 esse veram (§. 27.)

SCHOLION.

29. *Ut veritas Theorematis præcedentis luculentius pateat; adjicio ex infinitis rationum paribus, per quæ lunula circuli, cujus quadratum diametri = 4, prodit semper = 1, adhuc 9 sequentia:* 11 : 4 *&* 12 : 2; 13 : 5 *&* 14 : 3; 15 : 5 *&* 16 : 3; 17 : 5 *&* 18 : 4; 19 : 6 *&* 20 : 4; 21 : 6 *&* 22 : 5; 23 : 7 *&* 24 : 5; 25 : 8 *&* 26 : 6; 27 : 8 *&* 28 : 5.

30. COROLLARIUM. Quoniam ex Theoremate *Hippocratis* liquet, Quadratum diam. esse ad lunulam ut 4 : 1, & eadem ratio per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulò majores, aliæ paulo minores, quàm 4 : 1, *semper & sine ulla exceptione* prodit; manifestum est, è solis 2 limitibus quantitatem incognitam, quæ cum cognita in eadem ratione crescit, observatis observandis, semper posse determinari.

THEOREMA V.

31. *Ratio Quadrati diametri ad circulum ut* 32 : 25 (§. 26.) *est vera.*

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente hujus rationis pro 3tio termino proportionis (§. 27.), & assumtis rationibus 1mo:) ut 14 : 11 & 13 : 10, prodeunt circuli $\frac{352}{14}$ & $\frac{320}{13} = \frac{4576}{182}$ & $\frac{4480}{182}$, qui ex se ablati relinquunt summam $x + y = \frac{96}{182}$, cujus partes sunt $\frac{2}{14}$ & $\frac{5}{13}$, quia sola 5ta differentia 26 divisa per denominatorem minorem 13 exhibet quotum 2 (§. 22.). Ergo circulus verus est $\frac{352}{14} - \frac{2}{14} = \frac{350}{14} = 25$; vel $\frac{320}{13} + \frac{5}{13} = \frac{325}{13} = 25$. 2.) Per rationes 23 : 18 & 17 : 13 oriuntur circuli $\frac{576}{23}$ & $\frac{415}{17} = \frac{9792}{391}$ & $\frac{9568}{391}$, qui ex se subducti manifestant summam $x + y = \frac{224}{391}$, cujus partes sunt $\frac{1}{23}$ & $\frac{9}{17}$, quia sola 9na differentia 17 divisa per denominatorem minorem 17 prodit quotum $= 1$. Ergo circulus verus est $\frac{576}{23} - \frac{1}{23} = \frac{575}{23} = 25$; vel $\frac{416}{17} + \frac{9}{17} = \frac{425}{17} = 25$. 3.) Per rationes 1000 : 785 & 9 : 7 emergunt circuli $\frac{25120}{1000}$ & $\frac{224}{9} = \frac{226080}{9000}$ & $\frac{224000}{9000}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{2080}{9000}$, cujus partes sunt $\frac{120}{1000}$ & $\frac{1}{9}$, quia sola 1ma differentia 1080 divisa per denominatorem 9 dat quotum 120. Ergo circulus verus est $\frac{25120}{1000} - \frac{120}{1000} = \frac{25000}{1000} = 25$; vel $\frac{224}{9} + \frac{1}{9} = \frac{225}{9} = 25$. Jam cum per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulò majores, aliæ paulò minores quàm 32 : 25, prodeat semper idem circulus $= 25$; palam est, Quadratum diametri esse ad circulum ut 32 : 25 (§. 10. 26.).

32. COROLLARIUM. Quoniam igitur Quadratum diametri est ad circulum ut 32 : 25 = 64 : 50; evidens est, radicem hujus Quadrati, h. e.

ti, h. e. diametrum esse 8, & ejus 4tam partem 2, per quam circuli area divisa manifestat peripheriam = 25. Ergo independenter ab ante demonstratis diameter est ad peripheriam ut 8 : 25.

THEOREMA VI.

33. *Ratio Quadrati diametri ad segmentum* = 64 : 9 (§. 27.) *est vera.*

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 64 hujus rationis pro 3tio termino proportionis & assumtis rationibus 1mo: ut 20 : 3 & 43 : 6, prodeunt segmenta $\frac{192}{20}$ & $\frac{384}{43} = \frac{8256}{860}$ & $\frac{7680}{860}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{576}{860}$ (§. 7.), cujus partes sunt $\frac{12}{20}$ & $\frac{3}{43}$, quia sola 12ma differentia 60, divisa per denominatorem minorem 20, exhibet quotum 3 (§. 22.). Ergo segmentum verum est $\frac{192}{20} - \frac{12}{20} = \frac{180}{20} = 9$; vel $\frac{384}{43} + \frac{3}{43} = \frac{387}{43} = 9$. 2) Per rationes 49 : 7 & 57 : 8 oriuntur segmenta $\frac{448}{49}$ & $\frac{512}{57} = \frac{25536}{2793}$ & $\frac{25088}{2793}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{448}{2793}$, cujus partes sunt $\frac{7}{49}$ & $\frac{1}{57}$, quia sola 7ma differentia 49 divisa per denominatorem minorem 49 manifestat quotum 1. Ergo segmentum verum est $\frac{448}{49} - \frac{7}{49} = \frac{441}{49} = 9$; vel $\frac{512}{57} + \frac{1}{57} = \frac{513}{57} = 9$. 3.) Per rationes 70 : 10 & 86 : 12 emergunt segmenta $\frac{640}{70}$ & $\frac{768}{86} = \frac{55040}{6020}$ & $\frac{53760}{6020}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{1280}{6020}$, cujus partes sunt $\frac{10}{70}$ & $\frac{6}{86}$, quia sola 1ma differentia 420 divisa per denominatorem minorem 70 dat quotum 6. Ergo segmentum verum est $\frac{640}{70} - \frac{10}{70} = \frac{630}{70} = 9$; vel $\frac{768}{86} + \frac{6}{86} = \frac{774}{86} = 9$. Jam cum per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulò majores, aliæ paulò minores quàm 64 : 9, factis faciendis, prodeat semper idem segmentum = 9; palam est, id esse verum (§. 10.), consequenter rationem quadrati diametri ad illud = 64 : 9 esse veram (§. 27.).

34. COROLLARIUM. Quoniam igitur, posito quadrato diametri 64, lunula est 16 (§. 28.) & segmentum 9 (§. 33.); perspicuum est, semicirculum, quippe qui est conflatus ex utroque, esse = 16 + 9 = 25, & circulum integrum 50. Est igitur Quadratum diametri ad aream circuli independenter ab ante demonstratis ut 64 : 50, consequenter diameter ad peripheriam ut 8 : 25 (§. 32.).

THEOREMA VII.

35. *Ratio cubi diametri ad sphæram ut* 48 : 25 (§. 26.) *est vera.*

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 48 hujus rationis pro 3tio termino proportionis, & assumtis rationibus 1mo: ut 17 : 9 & 25 : 13, prodeunt sphæræ $\frac{432}{17}$ & $\frac{624}{25} = \frac{10800}{425}$ & $\frac{10608}{425}$, quæ ex se ablatæ relinquunt summam $x + y = \frac{192}{425}$, cujus partes sunt $\frac{7}{17}$ & $\frac{1}{25}$, quia sola 7ma differentia 17 divisa per denominatorem minorem 17 exhibet quotum 1. Ergo sphæra vera est $\frac{432}{17} - \frac{7}{17} = \frac{425}{17} = 25$; vel $\frac{624}{25} + \frac{1}{25} = \frac{625}{25} = 25$. 2. Per rationes 90 : 47 & 75 : 39 oriuntur sphæræ $\frac{2256}{90}$ & $\frac{1872}{75} = \frac{169200}{6750}$ & $\frac{168480}{6750}$, quæ ex se subductæ relinquunt summam $x + y = \frac{720}{6750}$, cujus partes sunt $\frac{6}{90}$ & $\frac{3}{75}$, quia sola 3tia differen-

tia 450 divisa per denominatorem minorem 75 manifestat quotum 6 (§. 22.). Ergo sphæra vera est $\frac{2256}{90} - \frac{6}{90} = \frac{2250}{90} = 25$; vel $\frac{1872}{75} + \frac{3}{75} = \frac{1875}{75} = 25$. 3.) Per rationes 300 : 157 & 27 : 14, prodeunt sphæræ $\frac{7536}{300}$ & $\frac{672}{27} = \frac{203472}{8100}$ & $\frac{201600}{8100}$, quibus à se ablatis remanet summa $x + y = \frac{1872}{8100}$, cujus partes sunt $\frac{36}{300}$ & $\frac{3}{27}$, quia sola 3tia differentia 972 divisa per denominatorem minorem 27 dat quotum 36. Ergo sphæra vera est $\frac{7536}{300} - \frac{36}{300} = \frac{7500}{300} = 25$; vel $\frac{672}{27} + \frac{3}{27} = \frac{675}{27} = 25$. (§. 10.). Jam cum per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulo majores, aliæ paulo minores, quàm 48 : 25, observatis observandis, prodeat semper eadem sphæra = 25; evidens est, hanc esse veram. Ergo cubus diametri est ad sphæram, ut 48 : 25 (§. 10. 27.).

36. COROLLARIUM. Ratio 48 : 25 multiplicata per 64 & divisa deinde per 6, exhibet æqualem 512 : $\frac{1600}{6}$. Ergo cubus diametri est ad sphæram, ut 512 : $\frac{1600}{6}$. Jam cum radix hujus cubi, h. e. diameter sit 8; palam est, dividendo per hujus 6tam partem $= \frac{8}{6}$ sphæram $\frac{1600}{6}$, prodire superficiem $\frac{9600}{48}$, qua porro divisa per diametrum integram, emergit peripheria = 25. Ergo independenter ab ante demonstratis diameter est ad periph. ut 8 : 25.

THEOREMA VIII.

37. *Lunula ADBEA est ad segmentum AEBCA* (§. 42. fig. *) *ut* 16 : 9.

DEMONSTRATIO. Posito ubique Antecedente 16 pro 3tio termino proportionis, prodeunt 1mo:) per rationes 7 : 4 & 6 : 3 segmenta $\frac{64}{7}$ & $\frac{48}{6} = \frac{384}{42}$ & $\frac{336}{42}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{48}{42}$, cujus partes sunt $\frac{1}{7}$ & $\frac{6}{6}$, quia sola 6ta differentia 6 per denominatorem minorem 6 divisa exhibet Quotum = 1. (§. 22.). 2.) Per rationes 10 : 6 & 11 : 6 oriuntur segmenta $\frac{96}{10}$ & $\frac{96}{11} = \frac{1056}{110}$ & $\frac{960}{110}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{96}{110}$, cujus partes sunt $\frac{6}{10}$ & $\frac{3}{11}$, quia sola 6ta differentia 30 divisa per denominatorem minorem 10 exhibet quotum 3. 3.) Per rationes 17 : 10 & 18 : 10 emergunt segmenta $\frac{160}{17}$ & $\frac{160}{18} = \frac{2880}{306}$ & $\frac{2720}{306}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{160}{306}$, cujus partes sunt $\frac{7}{17}$ & $\frac{2}{18}$, quia sola differentia 7ma 34 divisa per denominatorem minorem 17 prodit quotum 2. 4.) Per rationes 19 : 11 & 20 : 11 prodeunt segmenta $\frac{176}{19}$ & $\frac{176}{20} = \frac{3520}{380}$ & $\frac{3344}{380}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{176}{380}$, cujus partes sunt $\frac{5}{19}$ & $\frac{4}{20}$, quia sola 5ta differentia 76 divisa per denominatorem minorem 19 manifestat quotum 4 (§. 22.). 5.) Per rationes 21 : 12 & 22 : 12 oriuntur segmenta $\frac{192}{21}$ & $\frac{192}{22} = \frac{4224}{462}$ & $\frac{4032}{462}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{192}{462}$, cujus partes sunt $\frac{3}{21}$ & $\frac{6}{22}$, quia sola 3tia differentia 126 divisa per denominatorem minorem 21 exhibet quotum 6. 6.) Per rationes 23 : 13 & 24 : 13 emergunt segmenta $\frac{208}{23}$ & $\frac{208}{24} = \frac{4992}{552}$ & $\frac{4784}{552}$, quibus à se subtractis remanet summa $x + y = \frac{208}{552}$, cujus partes sunt $\frac{1}{23}$ & $\frac{8}{24}$, quia sola 1ma differentia 184 divisa per denomi-

nominatorem minorem 23 dat quotum 8. 7.) Per rationes 25 : 15 & 26 : 14 prodeunt segmenta $\frac{240}{25}$ & $\frac{224}{26} = \frac{6240}{650}$ & $\frac{5600}{650}$, quæ ex se ablata relinquunt summam $x + y = \frac{640}{650}$, cujus partes sunt $\frac{15}{25}$ & $\frac{10}{26}$, quia sola 15ta differentia 250 divisa per denominatorem minorem 25 exhibet quotum 10. 8.) Per rationes 27 : 16 & 28 : 15 oriuntur segmenta $\frac{256}{27}$ & $\frac{240}{28} = \frac{7168}{756}$ & $\frac{6480}{756}$, quæ ex se subducta relinquunt summam $x + y = \frac{688}{756}$, cujus partes sunt $\frac{13}{27}$ & $\frac{12}{28}$, quia sola 13tia differentia 324 divisa per denominatorem minorem 27 prodit quotum 12. Jam cum ablatis ex segmentis excessivis partibus ejusdem cum illis denominationis, & additis ad defectiva partibus, quæ cum his communibus gaudent denominatoribus, prodeat semper segmentum $= 9$, & idem etiam per innumeras rationes, quarum aliæ sunt paulo majores, aliæ paulo minores, quàm 16 : 9, semper determinari possit; evidens est, segmentum $= 9$ esse verum (§. 10.). Ergo lunula est ad segmentum ut 16 : 9. (§. 27.).

38. COROLLARIUM. Posita lunula $= 16$, quadratum diametri est 64, quod est itaque ad segmentum ut 64 : 9. Ergo diameter est ad periph. ut 8 : 25 (§. 34.).

PROBLEMA V.

39. *Construere quadratum æquale circulo dato.*

RESOLUTIO. 1. Diameter circuli dati dividatur in 8 partes æquales. 2.) Jungantur 2 lineæ 5 talium partium ad angulum rectum & ducatur hypothenusa. Dico Quadratum hujus hypothenusæ esse æquale circulo dato.

DEMONSTRATIO. Quoniam uterque Cathetus continet per constructionem 5 partes diametri; manifestum est, quadrata utriusque esse $= 25 + 25 = 50$, consequenter etiam quadratum hypothenusæ $= 50$; sed circulus, cujus diameter est 8 partium, est quoque $= 50$ (§. 26. 32.). Ergo quadratum dictæ hypothenusæ est æquale circulo dato.

PROBLEMA VI.

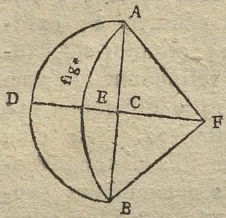
40. *Describere circulum æqualem quadrato dato.*

RESOLUTIO. 1.) In quadrato dato ducantur 2 diagonales sese intersecantes, ita orientur 4 Triangula rectangula, quorum Catheti erunt inter se æquales, & hypothenusæ quoque æquales. 2.) Cathetus quicunque dividatur in 5 partes æquales, & radio 4 talium partium describatur circulus. Dico hunc esse æqualem quadrato dato.

DEMONSTRATIO. Quadratum datum est quadratum hypothenusæ $= 50$, quia quadrata 2 Cathetorum 5 partium sunt $= 50$; sed circulus radio 4 partium Catheti descriptus est quoque $= 50$: ergo talis circulus est æqualis quadrato dato.

41. COROLLARIUM. Quoniam Triangula, Polygona & Parallelogramma commutari possunt in quadrata, palam est, etiam circulos describi posse, qui dictis figuris sint æquales.

42. SCHOLION I. *Posita diametro* $= a$, *erit lunula* $= \frac{1}{4}aa$; *posito porro segmento* $= x$, *erit area circuli, quippe quæ componitur ex 2 lunulis & ex 2 segmentis*, $= \frac{2}{4}aa + 2x$, *qua divisa per* $\frac{1}{4}a$, *h. e. per 4tam partem diametri, prodit peripheria* $\frac{8}{4}a + 2x : \frac{1}{4}a$. *Jam cum posita diametro* $= 1$, *peripheria* Ludolphina *sit* 3, *h. e. ejus tripla cum fractione, cujus numerator constat ex* 35 *notis; palam est, ablatis ex hac periph* $\frac{8}{4}a = 2a$, *h. e. 2 diametris, relinqui* $2x : \frac{1}{4}a = 1,14159265358979323846 26$ &c. &c : *id quod veritati repugnat: nam lunula terminatur 2 curvis, nempe semiperipheria* ADB *circuli minoris & 4ta*



parte peripheriæ AEB *circuli majoris; nihilominus tamen 2 lunulæ cujuslibet circuli divisæ per* 4tam *partem diametri produnt semper tantum fractionem æqualem 2 diametris. Ergo impossibile est, ut 2 segmenta (quorum quodlibet terminatur solùm una curva, nempe eadem 4ta parte periph.* AEB *circuli majoris, & diametro* ACB *circuli minoris), divisa per 4tam partem diametri, exhibeant diametrum cum fractione tam monstrosa, cujus valor nullatenus exactè determinari potest. Segmenta cujuscunque circuli divisa per 4tam partem diametri manifestant semper unam diametrum cum ejus parte 8va.* (§. 33. 37.). *Jam verò* Archimedes *assumtis figuris polygonis, inscripta & circumscripta, utraque 96 laterum, conatus est ostendere, peripheriam continere diametrum minus quàm* $3 + \frac{1}{7}$, *& amplius quam* $3 + \frac{10}{71}$. *Est ergo juxta eum ratio diametri ad peripheriam fere ut* $1 : 3\frac{10}{71}$, *de qua Illustris* Wolfius in Compendio Elementorum Matheseos (§. 129. Geom.) *ait:* Quoniam verò hæc ratio in excessu peccat, alii investigarunt accuratiorem, *h. e. quoniam peripheria, quæ est diametrì tripla cum paulo pluribus quam* $\frac{10}{71}$ *ejusdem, est justa major; alii investigarunt peripheriam magis ad veram accedentem. Falluntur igitur, qui asserunt se de veritate limitum ab* Archimede *pro determinanda peripheria constitutorum esse æquè convictos ac de quavis alia propositione Geometrica, siquidem Mathematicus tam inclytus, qui præclaris ingenii dotibus inter cæteros adeò eminuit, ut tandem ob immortalia in rem literariam merita in numerum Baronum S. R. J. fuerit cooptatus, de hac veritate supposita non potuit persvaderi. Latus Dodecagoni per 2 extractiones radicum surdarum, latus Polygoni 24 laterum per 4, latus Polygoni 48 laterum per 6, & latus Polygoni 96 laterum per 8 extractiones radicum surdarum investigatur: unde mirum non est; quòd nullum horum laterum, consequenter nec peripheria exactè determinari possit. Ipsimet Defensores rationis tam* Ludolphinæ, *quàm* Archimedeæ, *qui præjudiciis non laborant, ingenuè fatentur, ambas esse tantùm prope veras; non autem veras: proinde supervacaneum foret, iis examinandis diutius immorari. Calculus integralis, à Viris summis* Leibnitio & Newtonio *inventus, est quidem ingeniosissimus; sed quòd*

ejus

ejus usus in rectificandis curvis, sit tantus, quantus prædicatur, id tum demum credam, cum videro Theoremata mea, præsertim 3tium & 4tum, directè & solidè refutata.

43. SCHOLION II. *Celeberrimi Auctores* Encyclopædiæ *ante paucos annos in Helvetia editæ sub titulo:* Quadrature du Cercle, *ita inquiunt:* Mr. *Newton* a deja démontré dans le premier livre de ses Principes Mathematiques Sect. VI. Tom. XXVIII, que la Quadrature indefinie du Cercle, & en general de toute courbe ovale etoit impossible, c'est à dire, qu'on ne pouvoit trouver une Methode pour quarrer à volonté une portion quelconque de l'aire du Cercle; mais il n'est pas encore prouvé, qu'on ne puisse avoir la quadrature absolue du Cercle entier - - - . *Quoniam igitur Viri tanti supra laudem meam positi, quippe qui sunt Luminaria Magna Reipublicæ literariæ, scriptis tot Mathematicorum aliàs insignium contra perfectam Quadraturam circuli editis de ejus impossibilitate non potuerunt convinci; frustra glorietur hìc quidam Geometra, se eam posse probare per unicum Dodecagonum circulo inscriptum. Si ille mentem affectibus non habet penitus præpeditam, reor ipsum aliter esse sensurum, ritè perpensis hisce propositionibus, quæ quidem sunt eædem, quas jam à septem annis suscepi tuendas; sed nova methodo & tanta evidentia tantoque rigore demonstrandi nunc concinnatæ, ut non solùm sperare, verùm etiam confidere queam, Viros Mathematum peritos illis assensum suum non esse denegaturos. Cæterùm sit Amicus tam* Archimedes, *quàm* Ludolphus *&* Metius, *quos omnes tres grata prosequor memoria: sit tamen magis amica* VERITAS, *quæ ab omnibus ambagibus tenebrisque, mihi antehac objectis, in hocce opusculo reperitur remota, & luce meridiana clariùs demonstrata. Interim in gratiam eorum, qui magis praxi, quàm Theoria delectantur, lubet adhuc unum problema adjicere. Sit itaque*

PROBLEMA VII.

44. *Rationem diametri ad peripheriam* = 8 : 25 *experimento comprobare.*

RESOLUTIO & DEMONSTRATIO. 1.) Ope funiculi fungentis vice radii, & 4 ulnarum longi describatur in pavimento plano arcus, eique applicetur chorda æqualis radio, quæ, cum sit latus Hexagoni, determinat sextantem peripheriæ. 2.) Ad hanc chordam ducatur è centro perpendicularis, quæ prolongata dividit sextantem in 2 semisextantes, quorum quilibet est pars 12ma peripheriæ. 3.) A semisextante resecetur pars æqualis digito, quæ, ut regulâ ad eam applicatâ apparebit, erit omnino linea recta. 4.) Intervallum hujus lineæ designetur quinquies in semisextante, ita determinatur ejus 10ma pars; quod inde liquet, quia arcus 5″, ut mensuranti patebit, præcisè decies continetur in hoc semisextante, qui proinde est = 50″: unde sextans est = 100″, & peripheria integra = 600 digitis, qui divisi per

24 dant

24 dant 25 ulnas. Est igitur peripheria circuli, cujus diameter 8 ulnarum, $=$ 25 ulnis. Jam cum eadem peripheria, per rationem *Ludolphinam* 100 : 314 inventa, sit 25 ulnarum $+ \frac{3}{25}$; manifestum est, eam peccare in excessu $\frac{3}{25}$ ulnæ, h. e. 3 digitis quàm proximè. Ut experimentum rectè instituatur, consulenda sunt Elementa Geom. *Wolfii* (§. 132. 210. 212.)

45. SCHOLION. *Utendum est radio 4 ulnarum, seu 96″ in mensura majori, ut excessus peripheriæ tam* Archimedeæ, *quàm* Ludolphinæ *evadat eò palpabilior. Siquis verò maluerit hujusmodi delineationem in Charta perficere, necesse est, describere arcum radio 96 pedum è scala geometrica desumtorum, & reliqua peragere, ut in Problemate præcedente fuit dictum, ita patebit 10mam partem semisextantis, h. e. 120mam partem peripheriæ esse $=$ 5′, consequenter peripheriam integram $=$ 120 x 5 $=$ 600 pedibus: unde diameter est ad peripheriam ut 192 : 600, h. e. dividendo utrinque per 24, ut 8 : 25.*